Riassunto. Sia A la realizzazione in L^p $(1 < p < \infty)$ di un operatore differenziale $P(D_x, D_t)$ su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ con condizioni al bordo $B_k(D_x, D_t)u(x,0) = 0$ $(1 \leq k \leq m)$, dove P è un polinomio omogeneo di grado $2m$ in $n+1$ variabili che soddisfa una opportuna condizione di ellitticità e i B_k sono polinomi omogenei di grado $m_k < 2m$; si suppone che la usuale condizione complementare sia verificata. Si dimostra che A è un operatore settoriale con calcolo funzionale H^∞ limitato.

Abstract. Let A be the L^p realization $(1 < p < \infty)$ of a differential operator $P(D_x, D_t)$ on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ with boundary conditions $B_k(D_x, D_t)u(x,0) = 0$ $(1 \leq k \leq m)$. Here P is a homogeneous polynomial of order $2m$ in $n+1$ variables that satisfies a suitable ellipticity condition, and B_k is a homogeneous polynomial of order $m_k < 2m$; it is assumed that the usual complementing condition is satisfied. It is proved that A is a sectorial operator with a bounded H^∞ functional calculus.

1 Introduzione

In questo seminario esporrò un risultato, ottenuto in collaborazione con Alberto Venni, sulla limitatezza del calcolo funzionale H^∞ per la realizzazione in L^p $(1 < p < \infty)$ di un operatore ellittico di ordine arbitrario su un semispazio, con condizioni alla frontiera generali, soddisfacenti la usuale condizione complementare. Per la precisione considero operatori ellittici a coefficienti costanti, coincidenti con la parte principale, con analoghe restrizioni per gli operatori di bordo. Questo caso dovrebbe costituire il primo passo verso la dimostrazione della limitatezza del calcolo funzionale H^∞ nel caso di operatori ellittici arbitrari su aperti limitati.

La limitatezza del calcolo funzionale H^∞ per un operatore settoriale A che agisce in uno spazio di Banach complesso è una proprietà più forte della limitatezza delle potenze immaginarie A^{is} $(s \in \mathbb{R})$, visto che la funzione $z \mapsto z^{is}$ è una funzione appartenente a H^∞. Quest'ultima proprietà ha importanti conseguenze. Anzitutto essa implica la coincidenza tra il dominio di A^r e lo spazio di interpolazione complesso $[X, \mathcal{D}(A^n)]_{Re\, r/n}$ $(Re\, r \in \,]0, n[\,)$; tale risultato è riportato in [22, Theorem 1.15.3] nella sua forma più generale, ma è stato utilizzato da vari autori già nei primi lavori sulle potenze frazionarie di operatori. In secondo luogo dalla limitatezza delle potenze immaginarie segue la regolarità massimale in L^p per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & t > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

cioè il fatto che qualunque sia $f \in L^p$ esiste una e una sola soluzione $u \in L^p$ del problema di Cauchy, tale che anche u' e Au appartengano a L^p (vedi [5, 12, 15]). È quindi evidente che la limitatezza delle potenze immaginarie per gli operatori ellittici ha interesse per lo studio di problemi parabolici.

La dimostrazione della limitatezza del calcolo funzionale H^∞ non presenta di solito difficoltà maggiori di quelle che si incontrano nel dimostrare la limitatezza delle potenze immaginarie e risulta più naturale.

In letteratura vi sono vari lavori riguardanti la limitatezza delle potenze immaginarie o del calcolo funzionale H^∞ per operatori ellittici. Per operatori del secondo ordine i risultati sono numerosi, vedi per esempio [4, 8, 9, 10, 14, 16, 20]. Per operatori di ordine arbitrario sono stati considerati due casi. Seeley in una serie di lavori pubblicati a cavallo tra gli anni '60 e '70 (vedi [17, 18, 19]) ha studiato le potenze immaginarie di sistemi ellittici su varietà senza bordo o su aperti limitati, sotto le ipotesi che i coefficienti e l'aperto siano C^∞; successivamente Duong ha dimostrato, nello stesso ambito, la limitatezza del calcolo funzionale H^∞ (vedi [7]). Più recentemente Amann, Hieber, Simonett e Duong [3, 11] hanno considerato sistemi ellittici su tutto lo spazio o su varietà senza bordo, giungendo a provare la limitatezza del calcolo funzionale H^∞ sotto ipotesi minimali di regolarità dei coefficienti. Nulla è noto per operatori di ordine arbitrario su un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^n$, con opportune condizioni al bordo, nel caso non C^∞ e le tecniche di Seeley non consentono di affrontare questo caso.

2 Posizione del problema e teorema principale

Dato un operatore lineare T in uno spazio di Banach X, indichiamo con $\mathcal{D}(T)$ il dominio di T, con $\mathcal{R}(T)$ l'immagine, con $\sigma(T)$ lo spettro di T e con $\rho(T)$ l'insieme risolvente.

Per $\theta \in]0,\pi]$ indichiamo con S_θ il settore aperto del piano complesso di semiampiezza θ attorno a $\mathbb{R}^+$, cioè

$$S_\theta = \{\rho\, e^{i\alpha} \mid \rho \in \mathbb{R}^+, \alpha \in]-\theta,\theta[\}\ ;$$

utilizzeremo la scrittura $\overline{S_\theta}$ anche nel caso $\theta = 0$ per indicare l'intervallo $[0,\infty[$. Per $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}]$ indichiamo con Σ_θ il doppio settore aperto del piano complesso di semiampiezza θ attorno all'asse immaginario, cioè

$$\Sigma_\beta = \{i\,\rho\, e^{i\alpha} \mid \rho \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \alpha \in]-\theta,\theta[\} = (i\,S_\theta) \cup (-i\,S_\theta)\ .$$

Se Ω è un aperto del piano complesso o di $\mathbb{C}^n$ indichiamo con $H^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate da Ω a $\mathbb{C}$ (o talvolta a valori in uno spazio di Banach). Esso è uno spazio di Banach rispetto alla norma dell'estremo superiore.

In particolare se $\Omega = (S_\theta)^n$ o $\Omega = (\Sigma_\beta)^n$ indicheremo con $H_0^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni in $H^\infty(\Omega)$ che vanno a 0 almeno come una potenza in 0 e all'infinito, cioè tali che esistono $C > 0$ e $s > 0$ per cui

$$\forall z = (z_1,\ldots,z_n) \quad |f(z)| \le C \prod_{j=1}^{n} \min\{|z_j|^s, |z_j|^{-s}\}\ .$$

Dati i polinomi P, $B_1,\ldots,B_m$ omogenei in $n+1$ variabili ($n \ge 1$) a coefficienti complessi, con P di grado $2m$ e B_k di grado m_k ($m_k < 2m$) consideriamo il problema di valori al bordo

$$\begin{cases} P(D_x,D_t)u(x,t) = f(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ B_k(D_x,D_t)u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$. Qui e nel seguito teniamo distinta la variabile t normale alla frontiera del semispazio dalle variabili $x = (x_1,\ldots,x_n)$ tangenziali. Con $D_x = (D_1,\ldots,D_n)$ indichiamo la n-pla degli operatori di derivazione parziale rispetto alle variabili $x_1,\ldots,x_n$ e con D_t l'operatore di derivazione parziale rispetto alla variabile t.

La realizzazione in L^p di questo problema è l'operatore A in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ definito da

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \mid B_k(D_x,D_t)u(x,0) = 0,\ \text{per } x \in \mathbb{R}^n, k = 1,\ldots,m\}$$
$$Au(x,t) = P(D_x,D_t)u(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\ .$$

Supponiamo che P sia (L,ω)-*ellittico* (dove $L \in \mathbb{R}^+$ e $\omega \in [0,\pi[$) nel senso che:

1. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad P(ix,it) \in \overline{S_\omega}$;
2. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad |P(ix,it)| \ge L^{-1}\|(x,t)\|$;

3. i coefficienti del polinomio P sono tutti, in modulo, minori o uguali di L.

Si può facilmente dimostrare, con argomenti di omogeneità e di compattezza, che un polinomio omogeneo è (L,ω)-ellittico (per opportuni L e ω) se e solo se

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \quad P(ix,it) \notin]-\infty, 0] \ .$$

Si può dimostrare che se $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in (\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}) \cup \{0\}$ e $(x,\mu) \neq (0,0)$ allora il polinomio $\mu - P(ix,\cdot)$ (che ha grado $2m$) ha esattamente m radici con parte reale positiva e m con parte reale negativa. Esso può quindi essere fattorizzato nella forma

$$\mu - P(ix,\lambda) = P^+_{ix,\mu}(\lambda)\, P^-_{ix,\mu}(\lambda) \ ,$$

dove $P^+_{ix,\mu}$ (rispettivamente $P^-_{ix,\mu}$) è un polinomio di grado m con tutte le radici aventi parte reale positiva (rispettivamente negativa).

Supponiamo inoltre che gli operatori di bordo soddisfino la *condizione complementare* di tipo ω, cioè che:
$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \mu \in (\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}) \cup \{0\}$ se $(x,\mu) \neq (0,0)$ allora i polinomi (in una variabile) $B_1(ix,\cdot), \dots, B_m(ix,\cdot)$ sono linearmente indipendenti modulo $P^-_{ix,\mu}$.

In queste ipotesi dimostriamo che:

Teorema 2.1 *A è un operatore settoriale con angolo spettrale ω e ha calcolo funzionale H^∞ limitato su ogni settore S_θ, per $\theta \in]\omega,\pi[$.*

Dire che A è settoriale con angolo spettrale ω significa che

1. $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\omega}$;
2. $\forall \theta \in]\omega,\pi[$ la funzione $\lambda \mapsto \lambda(\lambda - A)^{-1}$ è limitata su $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}$;
3. A ha dominio e immagine densi.

Dire che A ha calcolo funzionale H^∞ limitato sul settore S_θ significa che qualunque sia $h \in H^\infty(S_\theta)$ l'operatore $h(A)$ è limitato e esiste $C > 0$ (indipendente da h) tale che

$$\|h(A)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))} \leq C \sup_{S_\theta} |h|$$

(vedi [24] per la definizione di $h(A)$).

Ogni funzione in H^∞ si può approssimare, in modo opportuno, con funzioni in H^∞_0; da ciò segue che per dimostrare che un operatore ha calcolo funzionale H^∞ limitato è sufficiente provare la disuguaglianza scritta sopra quando $h \in H^\infty_0$.

Idea della dimostrazione. La tecnica utilizzata per provare il teorema 2.1 è la seguente. Anzitutto consideriamo l'operatore differenziale ordinario A_z in $L^p(\mathbb{R}^+)$ ottenuto dal problema ellittico in $n+1$ variabili sostituendo gli operatori $D_1, \dots, D_n$ con i parametri complessi $z_1, \dots, z_n$, cioè poniamo

$$\mathcal{D}(A_z) = \{u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \mid B_k(z,D_t)u(0) = 0, \text{ per } k = 1,\dots,m\}$$
$$A_z u(t) = P(z,D_t)u(t) \qquad t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Se $z_1, \ldots, z_n$ appartengono a un opportuno intorno conico di $(i\,\mathbb{R})^n$, cioè $z \in (\Sigma_\beta)^n$, allora si dimostra che A_z è θ-settoriale, dove, scegliendo β opportunamente piccolo, si può prendere θ arbitrariamente vicino a ω. Si dimostra inoltre che A_z ha calcolo funzionale H^∞ limitato su ogni settore contenente strettamente S_θ. Infine si dimostra che se $h \in H^\infty(S_\theta)$ allora la funzione $z \mapsto h(A_z)$ (che è a valori in $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+))$) risulta essere olomorfa e R-limitata su un opportuno $(\Sigma_\beta)^n$ (vedi [24] per la definizione di famiglia di operatori R-limitata).

Dato un operatore limitato T in $L^p(\mathbb{R}^+)$ ad esso risulta naturalmente associato un operatore limitato in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, che con abuso di notazione continuiamo a indicare con T, costruito ponendo $Tf(x,t) = T(f(x,\cdot))(t)$. Analoga costruzione, con qualche precauzione in più dovuta al fatto che esso non è limitato, può essere fatta a partire dall'operatore A_z. In questo nuovo ambito l'operatore A_z gode delle stesse proprietà.

Gli operatori $D_1, \ldots, D_n$, di derivazione parziale rispetto alle prime n variabili nello spazio $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, hanno come spettro l'asse immaginario, quindi la funzione $z \mapsto g_h(z) = h(A_z)$ è olomorfa su un intorno conico del prodotto cartesiano degli spettri degli operatori $D_1, \ldots, D_n$. Inoltre si vede facilmente che, come conseguenza del fatto che gli operatori $D_1, \ldots, D_n$ e A_z agiscono su variabili diverse, gli operatori di derivata parziale hanno risolventi che commutano tra di loro e con $h(A_z)$. Ciò consente di applicare (una generalizzazione di) un recentissimo teorema di Kalton e Weiss e di concludere che l'operatore $g_h(D_1, \ldots, D_n)$ è limitato, con norma che si controlla con $\sup_z \|g_h(z)\| = \sup_z \|h(A_z)\|$ che a sua volta si controlla con $\sup |h|$.

L'operatore $g_h(D_1, \ldots, D_n)$ è ottenuto, formalmente, con il seguente procedimento: nella definizione dell'operatore A si sostituiscono agli operatori $D_1, \ldots, D_n$ i numeri complessi $z_1, \ldots, z_n$, quindi si costruisce la funzione h dell'operatore così ottenuto e si rimettono gli operatori $D_1, \ldots, D_n$ al posto di $z_1, \ldots, z_n$. È quindi ragionevole aspettarsi che $g_h(D_1, \ldots, D_n)$ risulti essere uguale a $h(A)$; ciò è vero, ma la dimostrazione è piuttosto complessa. Essa si basa tra l'altro sul fatto che, fissato $\mu \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$, per una opportuna scelta di h l'operatore $g_h(D_1, \ldots, D_n)$ è l'inverso di $\mu - A$, ciò consente di concludere che A è settoriale. Naturalmente da $g_h(D_1, \ldots, D_n) = h(A)$ segue che $h(A)$ è limitato e che la sua norma è controllata da $\sup |h|$.

Osserviamo inoltre che nel corso della dimostrazione si ottiene la consueta stima a priori per le soluzioni del problema ellittico:

$$\|u\|_{W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \leq C \left(\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)}\right) \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A) .$$

Nel seguito saranno illustrati in maggiore dettaglio i passaggi della dimostrazione.

3 Studio degli operatori alle derivate ordinarie

Studiamo ora l'operatore differenziale ordinario A_z definito sopra. Tale studio è basato sulle tecniche classiche di integrazione su circuiti del piano complesso che circondano gli zeri del polinomio $\mu - P(z,\cdot)$, separando gli zeri con parte reale positiva da quelli con parte reale negativa (vedi p. es. [1, 2, 21]).

Al fine di dimostrare che l'operatore A_z gode di buone proprietà non solo per $z \in (i\,\mathbb{R})^n$, ma anche per z appartenente a un intorno conico di tale insieme, è necessa-

rio dimostrare che ellitticità e condizione complementare valgono anche vicino all'asse immaginario. Si ha infatti:

Teorema 3.1 *Per ogni* $\theta \in]\omega, \pi[$ *esiste* $\varphi(\theta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *tale che:*

1. *se* $(z, \lambda) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times \overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}} \setminus \{(0,0)\}$ *allora* $P(z,\lambda) \in S_\theta$ *e esiste* $C(\theta) \in \mathbb{R}^+$ *tale che* $|P(z,\lambda)| \geq C(\theta)\, \|(z,\lambda)\|^{2m}$ *;*

2. *se* $(z, \lambda) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times \overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}} \setminus \{(0,0)\}$ *allora il polinomio* $\mu - P(z,\cdot)$ *può essere scomposto nella forma* $P^+_{z,\mu} P^-_{z,\mu}$ *, dove* $P^+_{z,\mu}$ *(rispettivamente* $P^-_{z,\mu}$ *) è un polinomio di grado* m *con radici aventi parte reale positiva (rispettivamente negativa) e inoltre i polinomi* $B_1(z,\cdot), \dots, B_m(z,\cdot)$ *sono linearmente indipendenti modulo* $P^-_{z,\mu}$ *.*

Teorema 3.2 *Sia* $\theta \in]\omega, \pi[$ *. Se* $(z,\mu) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times (\mathbb{C} \setminus S_\theta) \setminus \{(0,0)\}$ *allora* $\mu \in \rho(A_z)$ *. Inoltre esiste* $C(\theta) \in \mathbb{R}^+$ *tale che*

$$\|D^\ell(\mu - A_z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+))} \leq C(\theta) \left(\|z\|^{2m} + |\mu|\right)^{\frac{\ell}{2m} - 1}$$

qualunque siano $(z,\mu) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times (\mathbb{C} \setminus S_\theta) \setminus \{(0,0)\}$ *e* $\ell \in \mathbb{N}$ *,* $\ell \leq 2m$ *.*
Perciò A_z *è un operatore settoriale con angolo spettrale* θ *.*

Dimostrazione. Invertire l'operatore $\mu - A_z$ significa risolvere, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, l'equazione $\mu u - A_z u = f$ e questo equivale a risolvere il problema

$$\text{(PNO)} \qquad \begin{cases} u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu\, u(t) - P(z,D)u(t) = f(t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z,D)u)(0) = 0 & 1 \leq k \leq m\,. \end{cases}$$

La condizione complementare assicura che il problema

$$\text{(PO)} \qquad \begin{cases} u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu\, u(t) - P(z,D)u(t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z,D)u)(0) = b_k & 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione qualunque siano $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$, quindi è evidente che (PNO) ha al più una soluzione. Risulta utile cercare tale soluzione nella forma $u = S_{z,\mu} f + T_{z,\mu} f$, dove $S_{z,\mu} f$ soddisfa l'equazione

$$\text{(ENO)} \qquad \begin{cases} u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu\, u(t) - P(z,D)u(t) = f(t) \end{cases}$$

mentre $T_{z,\mu} f$ è soluzione di (PO) con $b_k = -(B_k(z,D)S_{z,\mu} f)(0)$.

Si dimostra che come $S_{z,\mu} f$ si può prendere $H_{z,\mu} * f$ (considerando f prolungata a $\mathbb{R}$ con 0), dove $H_{z,\mu}$ è la funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\mathcal{F}H_{z,\mu}(\xi) = \frac{1}{\mu - P(z, i\xi)}\,.$$

Naturalmente $D^\ell(H_{z,\mu} * f) = D^\ell H_{z,\mu} * f$ e si ha $\|D^\ell H_{z,\mu}\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C(\theta)\left(\|z\|^{2m} + |\mu|\right)^{\frac{\ell}{2m}-1}$.

Inoltre si può dimostrare che l'unica soluzione di (PO) con $b_k = -(B_k(z,D)\,S_{z,\mu}f)(0)$ può essere scritta nella forma

$$T_{z,\mu}f(t) = \int_{\mathbb{R}^+} K_{z,\mu}(t,s)\, f(s)\, ds$$

dove $K_{z,\mu} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ è tale che

$$|D^\ell K_{z,\mu}(t,s)| \le C(\theta)\left(\|z\|^{2m} + |\mu|\right)^{\frac{\ell+1}{2m}-1} e^{-(t+s)\left(\|z\|^{2m}+|\mu|\right)^{\frac{1}{2m}}} .$$

La disuguglianza di Young assicura che l'operatore $D^\ell S_{z,\mu}$ è limitato da L^p a L^p con norma che si maggiora con una costante per $\left(\|z\|^{2m} + |\mu|\right)^{\frac{\ell}{2m}-1}$. Dalla stima di $D^\ell K_{z,\mu}$ segue che $D^\ell T_{z,\mu}$ è un operatore limitato in $L^p(\mathbb{R}^+)$ con norma che si maggiora con

$$C(\theta)\left(\|z\|^{2m} + |\mu|\right)^{\frac{\ell+1}{2m}-1}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\left(e^{-t\left(\|z\|^{2m}+|\mu|\right)^{\frac{1}{2m}}}\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\left(e^{-s\left(\|z\|^{2m}+|\mu|\right)^{\frac{1}{2m}}}\right)^{p'} ds\right)^{1/p'} = \frac{C(\theta)}{p^{1/p}p'^{1/p'}}\left(\|z\|^{2m} + |\mu|\right)^{\frac{\ell}{2m}-1} .$$

Teorema 3.3 *Siano* $\theta \in]\omega,\pi[$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus(S_\theta \cup \{0\})$, $\ell \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *tali che* $|\alpha| + \ell \le 2m$. *Allora* $\{z^\alpha D^\ell(\mu - A_z)^{-1} \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ *è R-limitato.*

Inoltre, nel caso $\alpha = 0$, $\ell = 0$ *la costante di R-limitatezza si maggiora con* $\dfrac{C(\theta)}{|\mu|}$.

Dimostrazione. Come visto nella dimostrazione del teorema precedente, $(\mu - A_z)^{-1}$ può essere scritto come somma di due operatori integrali, $S_{z,\mu}$ di convoluzione con il nucleo $H_{z,\mu}$ e $T_{z,\mu}$ avente nucleo $K_{z,\mu}$; analogamente $z^\alpha D^\ell(\mu - A_z)^{-1}$ può essere scomposto nella somma di un operatore di convoluzione con il nucleo $z^\alpha D^\ell H_{z,\mu}$ e un operatore integrale con nucleo $z^\alpha D_t^\ell K_{z,\mu}$.

Data una famiglia di operatori di convoluzione in L^p i cui nuclei soddisfano le ipotesi del teorema di Mihlin uniformemente, tale famiglia di operatori risulta essere R-limitata (vedi [23, 24]); ciò consente di provare la R-limitatezza della famiglia degli operatori di convoluzione.

La stima già vista per le derivate del nucleo $K_{z,\mu}$ consente di maggiorare (uniformemente in z) $z^\alpha D_t^\ell K_{z,\mu}$ con una costante per il nucleo di Hilbert $\frac{1}{t+s}$; da tale maggiorazione e dal fatto che il nucleo di Hilbert definisce un operatore integrale limitato in $L^p(\mathbb{R}^+)$ segue la R-limitatezza della seconda famiglia di operatori integrali.

Teorema 3.4 *Sia* $\theta \in]\omega,\pi[$, $\delta \in]\theta,\pi[$. *Allora* $\forall z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n$ *l'operatore* A_z *ha calcolo funzionale* $H^\infty(S_\delta)$ *limitato. Inoltre* $\forall h \in H^\infty(S_\delta)$ *l'insieme* $\{h(A_z) \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ *è R-limitato e la costante di R-limitatezza si maggiora con una costante per* $\|h\|_\infty$.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto le funzioni $h \in H_0^\infty(S_\delta)$. Per tali h si ha

$$h(A_z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,(\mu - A_z)^{-1}\,d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,S_{z,\mu}\,d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,T_{z,\mu}\,d\mu$$

dove γ è la frontiera di S_θ orientata opportunamente.

Ora se $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,S_{z,\mu} f\,d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,(H_{z,\mu} * f)\,d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,H_{z,\mu}\,d\mu\ * f$$

e, indicata con $\mathcal{F}$ la trasformata di Fourier, utilizzando il teorema dei residui si ottiene

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,H_{z,\mu}\,d\mu\Big)(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,\mathcal{F}H_{z,\mu}(\xi)\,d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\mu)}{\mu - P(z,i\xi)}\,d\mu = h(P(z,i\xi))\,.$$

La funzione $\xi \mapsto h(P(z,i\xi))$ è limitata su $\mathbb{R}$ e si può dimostrare, come conseguenza del fatto che si può estendere a una funzione olomorfa e limitata su $i\,\Sigma_{\varphi(\theta)}$, che la sua derivata si maggiora con

$$\frac{C(\theta)}{|\xi|} \sup_{\lambda \in i\,\Sigma_{\varphi(\theta)}} |h(P(z,i\xi))| = \frac{C(\theta)}{|\xi|}\|h\|_\infty$$

e quindi, per il teorema dei moltiplicatori di Mihlin, l'operatore

$$f \mapsto \int_\gamma h(\mu)\,H_{z,\mu}\,d\mu\ * f$$

è limitato e ha norma che si maggiora con una costante per $\|h\|_\infty$.

Utilizzando, come nella dimostrazione del teorema 3.3, il fatto che una famiglia di operatori di convoluzione, con nuclei che soddisfano uniformemente le ipotesi del teorema di Mihlin, risulta essere R-limitata, possiamo concludere che la famiglia di operatori scritta sopra è R-limitata con costante di R-limitatezza maggiorata da $C(\theta)\|h\|_\infty$.

D'altra parte

$$\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\,T_{z,\mu} f\,d\mu\Big)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) \int_{\mathbb{R}^+} K_{z,\mu}(t,s)\,f(s)\,ds\,d\mu =$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) K_{z,\mu}(t,s)\,d\mu\ f(s)\,ds$$

e, dalla stima già vista per il nucleo $K_{z,\mu}$, si ottiene

$$\Big|\int_\gamma h(\mu)\,K_{z,\mu}(t,s)\,d\mu\Big| \le C(\theta)\,\|h\|_\infty \int_\gamma |\mu|^{\frac{1}{2m}-1}\,e^{-(t+s)\,M_1(\theta)\,|\mu|^{\frac{1}{2m}}}\,d\,|\mu| \le \frac{C(\theta)}{t+s}\,\|h\|_\infty\,,$$

e questa stima, analogamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema 3.3, consente di concludere che

$$\left\{f \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(\mu)\, T_{z,\mu}\, f\, d\mu \,\middle|\, z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\right\}$$

è R-limitato con costante di R-limitatezza che si maggiora con $C(\theta)\,\|h\|_\infty$.

Possiamo quindi concludere che per $h \in H_0^\infty$ è $\|h(A_z)\| \leq C(\theta)\|h\|_\infty$ e da qui segue che A_z ha calcolo funzionale H^∞ limitato. Inoltre per $h \in H_0^\infty$ $\{h(A_z) \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ è R-limitato. Visto che ogni funzione H^∞ è limite di funzioni H_0^∞ si ottiene che quest'ultima affermazione è vera per ogni $h \in H^\infty$.

Osserviamo infine che si può facilmente dimostrare che le funzioni $z \mapsto D^\ell(\mu - A_z)^{-1}$ e $z \mapsto h(A_z)$ sono olomorfe.

Passiamo ora allo studio degli operatori di derivazione rispetto alle variabili tangenziali. Nello spazio di Banach $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ consideriamo gli operatori $D_1, \dots, D_n$ definiti da

$$\mathcal{D}(D_j) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \mid D_j u \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)\}$$
$$D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}\,.$$

Si può dimostrare, con un calcolo diretto, che $\sigma(D_j) = i\,\mathbb{R}$ e che

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus (i\,\mathbb{R}) \quad \|(\lambda - D_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))} \leq \frac{1}{|Re\,\lambda|}\,,$$

da cui segue che $\lambda(\lambda - D_j)^{-1}$ si mantiene limitato al di fuori di qualunque doppio settore Σ_β. Si può inoltre facilmente dimostrare che tali operatori hanno dominio e immagine densi. Vista l'analogia con gli operatori settoriali, risulta naturale chiamare gli operatori che godono di queste proprietà *bisettoriali* con angolo spettrale β.

Ciò consente di definire per D_j un calcolo funzionale analogo a quello degli operatori settoriali, considerando però funzioni olomorfe e limitate sui doppi settori anziché sui settori. È possibile anche, visto che gli operatori $D_1, \dots, D_n$ hanno risolventi che commutano, definire $h(D_1, \dots, D_n)$ quando h è olomorfa e limitata su $(\Sigma_\beta)^n$. In questo caso parliamo di calcolo funzionale congiunto. Si dimostra, facendo uso del teorema dei moltiplicatori di Mihlin, che tale calcolo funzionale congiunto è limitato.

4 Studio dell'operatore ellittico

Da ora in avanti tutti gli operatori verranno considerati nello spazio $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$; con abuso di notazione la scrittura A_z indicherà il corrispondente in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ dell'operatore A_z in $L^p(\mathbb{R}^+)$ considerato nella sezione precedente.

I risultati sull'operatore ellittico A che seguono si basano su quanto esposto nella sezione precedente e sul seguente risultato, che è essenzialmente dovuto a Kalton e Weiss (vedi [13, Theorem 4.4]), e che nella forma qui riportata si trova in [6].

Teorema 4.1 *Siano $T_1, \dots, T_n$ operatori bisettoriali nello spazio di Banach X con risolventi che commutano. Supponiamo essi abbiano calcolo funzionale congiunto $H^\infty((\Sigma_\beta)^n)$ limitato. Sia $f : (\Sigma_\beta)^n \to \mathcal{T}$ una funzione olomorfa con immagine R-limitata, dove $\mathcal{T}$ è il sottospazio di $\mathcal{L}(X)$ degli operatori che commutano con $T_1, \dots, T_n$. Allora $f(T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre $\|f(T_1, \dots, T_n)\|$ è maggiorata una costante (dipendente da $T_1, \dots, T_n$) per la costante di R-limitatezza dell'immagine di f.*

Sia $\theta \in]\omega, \pi[$. Per $\mu \in \mathbb{C} \setminus S_\theta$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\ell \in \mathbb{N}$ con $|\alpha| + \ell \leq 2m$ indichiamo con $G_{\mu,\alpha,\ell}$ la funzione da $(\Sigma_{\varphi(\theta)})^n$ a $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))$ tale che $G_{\mu,\alpha,\ell}(z) = z^\alpha D_t^\ell (\mu - A_z)^{-1}$. Indichiamo inoltre con R_μ la funzione $z \mapsto (\mu - A_z)^{-1} = G_{\mu,0,0}(z)$.

$G_{\mu,\alpha,\ell}$ è olomorfa e, per il teorema 3.3, R-limitata; se in particolare $\alpha = 0$ e $\ell = 0$ allora la costante di R-limitatezza si controlla con $1/|\mu|$. Inoltre i suoi valori commutano con gli operatori $D_1, \dots, D_n$, quindi per il teorema 4.1, $G_{\mu,\alpha,\ell}(D_x) \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))$ e $\|G_{\mu,0,0}(D_x)\| \leq \dfrac{C(\theta)}{|\mu|}$,

In modo analogo se $h \in H^\infty(S_\delta)$ allora, per il teorema 3.4, l'insieme $\{h(A_z) \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ è R-limitato e la costante di R-limitatezza si maggiora con una costante per $\|h\|_\infty$, e quindi possiamo concludere che, posto $G_h(z) = h(A_z)$, l'operatore $G_h(D_x)$ è limitato e la sua norma si maggiora con una costante per $\|h\|_\infty$.

Ciò che rimane da dimostrare per completare la dimostrazione del teorema 2.1, oltre alla densità di $\mathcal{D}(A)$ e di $\mathcal{R}(A)$, è che $R_\mu(D_x) = (\mu - A)^{-1}$ e che $G_h(D_x) = h(A)$ e questo viene ottenuto in vari passi successivi.

Nelle dimostrazioni che seguono utilizzeremo le funzioni $\Psi_j : (\mathbb{C} \setminus \{-j, -1/j\})^n \to \mathbb{C}$ ($j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) definite da

$$\Psi_j(z) = \prod_{k=1}^n \frac{j^2 z_k}{(j + z_k)(1 + j z_k)} .$$

Indicheremo con Ψ la funzione Ψ_1. La funzione Ψ è quella che interviene nella definizione del calcolo funzionale H^∞. Infatti se $\Gamma = \prod_{j=1}^n \Gamma_j$ dove Γ_j è una opportuna curva orientata nel piano z_j, e $h \in H^\infty$ si ha per definizione

$$h(D_x) = \Psi_j(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \Psi_j(z) h(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz .$$

Il calcolo funzionale rispetta le derivate del risolvente, come segue subito dal fatto che $G_{\mu,\alpha,\ell}(D_x) \in \mathcal{L}(L^p)$:

Lemma 4.2 *Per $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\ell \in \mathbb{N}$ con $|\alpha| + \ell \leq 2m$ si ha $G_{\mu,\alpha,\ell}(D_x) = D_x^\alpha D_t^\ell R_\mu(D_x)$ e quindi $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ $R_\mu(D_x) f \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$.*

Lemma 4.3 *$R_\mu(D_x)$ è un inverso destro di $\mu - A$.*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che per $f \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ risulta $R_\mu(D_x)f \in \mathcal{D}(A)$. Per il lemma 4.2 è $R_\mu(D_x)f \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, quindi resta da dimostrare che $B_k(D_x, D_t)\, R_\mu(D_x)f$ ha traccia nulla a $t = 0$.

Indichiamo con T_0 l'operatore di traccia a $t = 0$. Tale operatore è continuo nella norma di $\mathcal{D}(D_t)$.

Poniamo $G_k(z) = B_k(z, D_t)\,(\mu - A_z)^{-1}$. Per il lemma 4.2 si ha $B_k(D_x, D_t)\, R_\mu(D_x) = G_k(D_x)$. Visto che $\Psi_j(D_x)\, G(D_x)f \xrightarrow[j\to\infty]{} G(D_x)f$ nella norma di $\mathcal{D}(D_t)$, si ha anche $T_0\Psi_j(D_x)\, G_k(D_x)f \xrightarrow[j\to\infty]{} T_0\, G_k(D_x)f$; perciò per dimostrare che $T_0\, G_k(D_x)f = 0$ è sufficiente dimostrare che per ogni $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ è $T_0\,\Psi_j(D_x)\, G_k(D_x)f = 0$. Le funzioni $\Psi_j\, G_k$ hanno il vantaggio, rispetto alle funzioni G_k, di appartenere a H_0^∞; quindi si ha

$$T_0\Psi_j(D_x)\, G_k(D_x)f = T_0(\Psi_j\, G_k)(D_x)f = T_0\left(\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \Psi_j(z)\, G_k(z)\prod_{r=1}^{n}(z_r - D_r)^{-1} f\, dz\right),$$

l'integrale scritto sopra converge nella norma di $\mathcal{D}(D_t)$ quindi l'operatore di traccia può essere portato dentro integrale e la quantità scritta sopra è uguale a

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \Psi_j(z)\prod_{r=1}^{n}(z_r - D_r)^{-1} T_0\, G_k(z)\, f\, dz$$

che è nullo perché $T_0\, G_k(z)\, f = T_0\, B_k(z, D_t)\,(\mu - A_z)^{-1}f = 0$, visto che $(\mu - A_z)^{-1}f \in \mathcal{D}(A_z)$.

Per dimostrare che $(\mu - A)\, R_\mu(D_x) = I_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+)}$ è sufficiente osservare che se g è la funzione che vale costantemente $I_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+)}$ allora $g(D_x) = I_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+)}$, ma si ha anche $g(z) = (\mu - P(z, D_t))R_\mu(z)$ e quindi, per il lemma 4.2, $g(D_x) = (\mu - P(D_x, D_t))R_\mu(D_x)$.

Per dimostrare che $R_\mu(D_x)$ è un inverso sinistro di $\mu - A$ è necessario un risultato preliminare. Con $W_x^{r,p}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+)$ denotiamo lo spazio delle funzioni le cui derivate rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$ (fino all'ordine r) appartengono a $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$.

Lemma 4.4 *Siano $r \in \mathbb{N}$ e $g : (\Sigma_{\varphi(\theta)})^n \to W_x^{r,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ olomorfa. Supponiamo che per $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tali che $|\alpha| + |\beta| \le r$ la funzione $z \mapsto z^\alpha D_x^\beta(g(z))$ sia limitata. Allora per $|\alpha| \le r$ abbiamo*

$$\int_\Gamma \Psi(z)\prod_{k=1}^{n}(z_k - D_k)^{-1} D_x^\alpha(g(z))\, dz = \int_\Gamma z^\alpha\Psi(z)\prod_{k=1}^{n}(z_k - D_k)^{-1} g(z)\, dz.$$

Dimostrazione. Ovviamente è sufficiente dimostrare il teorema quando $|\alpha| = 1$ perché il caso generale si ottiene per iterazione. Si ha:

$$\int_\Gamma \Psi(z)\prod_{k=1}^{n}(z_k - D_k)^{-1}\, D_j(g(z))\, dz =$$

$$\int_\Gamma \Psi(z)\left(z_j\prod_{k=1}^{n}(z_k - D_k)^{-1} - \prod_{k\neq j}(z_k - D_k)^{-1}\right) g(z)\, dz\,,$$

ma

$$\int_{\Gamma_j} \Psi(z) \prod_{k\neq j} (z_k - D_k)^{-1} g(z)\, dz_j = 0$$

perché la funzione integranda è olomorfa "all'interno" di Γ_j e quindi

$$\int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{k\neq j} (z_k - D_k)^{-1} g(z)\, dz = 0$$

e la dimostrazione è conclusa.

Lemma 4.5 $R_\mu(D_x)$ *è un inverso sinistro di* $\mu - A$.

Dimostrazione. Sia $u \in \mathcal{D}(A)$. Dal lemma 4.4 segue che quando $|\alpha| + \ell \leq 2m$

$$\int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^{n} (z_r - D_r)^{-1} R_\mu(z)\, D_x^\alpha\, D_t^\ell u\, dz = \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^{n} (z_r - D_r)^{-1} z^\alpha\, R_\mu(z)\, D_t^\ell u\, dz$$

e quindi

$$\int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^{n} (z_r - D_r)^{-1} R_\mu(z)\, (\mu - A)\, u\, dz =$$

$$\int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^{n} (z_r - D_r)^{-1} R_\mu(z)\, (\mu - P(z, D_t))\, u\, dz.$$

La funzione $t \mapsto (\mu - A_z)^{-1} (\mu - P(z, D_t))\, u(x,t)$ è, per quasi ogni x , l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} v \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu\, v(t) - P(z, D)v(t) = (\mu - P(z, D_t))\, u(x,t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z, D)v)(0) = 0 & 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

e quindi la funzione $(\mu - A_z)^{-1} (\mu - P(z, D_t))u(x, \cdot) - u(x, \cdot)$, che denotiamo con $w(x, \cdot)$, è la soluzione di

$$\begin{cases} v \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu\, v(t) - P(z, D)v(t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z, D)v)(0) = -(B_k(z, D_t)u)(x, 0) & 1 \leq k \leq m\ , \end{cases}$$

cioè di (PO) con $b_k = -(B_k(z, D_t)u)(x, 0)$. Abbiamo

$$R_\mu(D_x)\, (\mu - A)u = \Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^{n} (z_r - D_r)^{-1} R_\mu(z)\, (\mu - A)u\, dz =$$

$$\Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^{n} (z_r - D_r)^{-1} (\mu - A_z)^{-1} (\mu - P(z, D_t))u\, dz =$$

$$\Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} (u + w)\, dz \,.$$

Ma

$$\Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} u\, dz = \Psi(D_x)^{-1} \Psi(D_x) u = u \,,$$

mentre si può dimostrare che

$$\Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} w\, dz = 0 \,.$$

Tale dimostrazione si basa sul fatto che w, essendo soluzione di (PO), può essere scritta in una forma particolare e impiega il lemma 4.4 per trasformare l'espressione scritta sopra in un'altra in cui compaiono termini del tipo $(B_k(D_x, D_t)u)(\cdot, 0)$ che sono nulli perché $u \in \mathcal{D}(A)$.

Da ciò che si è dimostrato finora segue che $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega} \subseteq \rho(A)$ e che per $\theta \in]\omega, \pi[$ esiste $C(\theta) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta} \quad \|(\mu - A)^{-1}\| \leq \frac{C(\theta)}{|\mu|} \,.$$

Per dimostrare che A è settoriale rimane da dimostrare che ha dominio e immagine densi. La densità del dominio è ovvia. La dimostrazione della densità dell'immagine si ottiene provando anzitutto che A è iniettivo, cosa che segue abbastanza facilmente dalle stime appena viste, e osservando che dal fatto che L^p è riflessivo e dalla stima sul risolvente di A segue che tutto lo spazio è somma diretta del nucleo di A con la chiusura della sua immagine, quindi la iniettività implica che l'immagine è densa.

Proviamo ora la uguaglianza $g_h(D_x) = h(A)$. È sufficiente dimostrare tale uguaglianza per $h \in H_0^\infty$. Si ha

$$h(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\, R_\mu(D_x)\, d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\, \Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \Psi(z)\, R_\mu(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz\, d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \Psi(D_x)^{-1} \int_\gamma \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \Psi(z)\, h(\mu)\, R_\mu(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz\, d\mu =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \Psi(D_x)^{-1} \int_\Gamma \Psi(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu)\, R_\mu(z)\, d\mu \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz = g_h(D_x) \,.$$

Come già osservato, visto che $g_h(D_x) \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))$ e $\|g_h(D_x)\| \leq C(\theta)\, \|h\|_{H^\infty}$, ciò garantisce la limitatezza del calcolo funzionale per A.

Infine da quanto visto finora si ottiene la stima a priori:

Teorema 4.6 *Esiste $C > 0$ tale che $\forall u \in \mathcal{D}(A)$*

$$\|u\|_{W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \leq C \left(\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \right).$$

Dimostrazione. Il teorema è una conseguenza immediata del fatto che gli operatori $G_{\mu,\alpha,\ell}$ sono limitati, infatti per $u \in \mathcal{D}(A)$, dai lemmi 4.2 e 4.5 segue

$$\|u\|_{W^{2m,p}} = \Big(\sum_{|\alpha|+\ell \leq 2m} \|D_x^\alpha D_t^\ell u\|_{L^p}^p \Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{|\alpha|+\ell \leq 2m} \|D_x^\alpha D_t^\ell R_{-1}(D_x)(-1-A)u\|_{L^p}^p \Big)^{1/p} \leq$$

$$\Big(\sum_{|\alpha|+\ell \leq 2m} \|G_{-1,\alpha,\ell}(D_x)\|^p \Big)^{1/p} \Big(\|Au\|_{L^p} + \|u\|_{L^p} \Big).$$

Riferimenti bibliografici

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I; Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623–727.

[2] M. S. Agranovich, M. I. Vishik: Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type; Russian Math. Surveys **19** n. 3 (1964), 53–157.

[3] H. Amann, M. Hieber, G. Simonett: Bounded H_∞-calculus for elliptic operators; Differential Integral Equations **7** (1994), 613–653.

[4] W. Arendt, A. F. M. ter Elst: Gaussian estimates for second order elliptic operators with boundary conditions; J. Operator Theory **38** (1997), 87–130.

[5] G. Dore, A. Venni: On the closedness of the sum of two closed operators; Math. Z. **196** (1987), 189–201.

[6] G. Dore, A. Venni: H^∞ functional calculus for bisectorial operators; preprint.

[7] X. T. Duong: H_∞ functional calculus of elliptic operators with C^∞ coefficients on L^p spaces on smooth domains; J. Austral. Math. Soc. Ser. A **48** (1990), 113–123.

[8] X. T. Duong: H_∞ functional calculus of second order elliptic partial differential operators on L^p spaces; in "Miniconference on Operators in Analysis" (I. Doust, B. Jefferies, C. Li, A. McIntosh, editors), Proc. Centre Math. Anal. A. N. U. vol. 24 (1990), pp. 91–102.

[9] X. T. Duong, A. McIntosh: Functional calculi of second-order elliptic partial differential operators with bounded measurable coefficients; J. Geom. Anal. **6** (1996), 181–205.

[10] X. T. Duong, E. M. Ouahabaz: Complex multiplicative perturbations of elliptic operators: heat kernel bounds and holomorphic functional calculus; Differential Integral Equations **12** (1999), 395–418.

[11] X. T. DUONG, G. SIMONETT: H_∞-calculus for elliptic operators with nonsmooth coefficients; Differential Integral Equations **10** (1997), 201–217.

[12] Y. GIGA, H. SOHR: Abstract L^p-estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains; J. Funct. Anal. **102** (1991), 72–94.

[13] N. J. KALTON, L. WEIS: The H^∞-calculus and sums of closed operators; preprint.

[14] A. MCINTOSH, A. NAHMOD: Heat kernel estimates and functional calculi of $-b\Delta$; Math. Scand. **87** (2000), 287–319.

[15] J. PRÜSS, H. SOHR: On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces; Math. Z. **203** (1990), 429–452.

[16] J. PRÜSS, H. SOHR: Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p-spaces, Hiroshima Math. J. **23** (1991), 161–192.

[17] R. T. SEELEY: Complex powers of an elliptic operator; in: "Singular Integrals", Proc. Simpos. Pure Math. vol. 10, American Mathematical Society, 1967, pp. 288–307.

[18] R. T. SEELEY: The resolvent of an elliptic boundary problem; Amer. J. Math. **91** (1969), 889–920.

[19] R. T. SEELEY: Norms and domains of the complex powers A_B^z; Amer. J. Math. **93** (1971), 299–309.

[20] H. SOHR, G. THÄTER: Imaginary powers of second order differential operators and L^q-Helmholtz decomposition in the infinite cylinder; Math. Ann. **311** (1998), 577–602.

[21] V. A. SOLONNIKOV: On general boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. I; Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **56** (1966), 193–232.

[22] H. TRIEBEL: *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*; Noth-Holland, 1978.

[23] A. VENNI: Mihlin multiplier theorem and R-boundedness; preprint.

[24] A. VENNI: Calcolo funzionale e R-limitatezza; Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Bologna, 2001.